Intermède

# NUMERATIONS

Une manière primesautière de figurer un nombre naturel consiste
en un plateau portant des pions ou jetons
en nombre égal au naturel considéré ou, graphiquement,
en une corde d'Euler entourant ce nombre de points.

Des dispositions de ces points selon des figures suggestives
peuvent intégrer le nombre dans une pensée géométrique.

La numération binaire héritée de Leibniz
recourt à un <u>abaque binaire</u>

```
...  ___ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______
        :      :      :      :      :      :      :      :      :      :
        :      :      :      :      :      :      :      :      :      :
...  ___:______:______:______:______:______:______:______:______:______:
```

où chaque pion dans une case
est mis pour deux pions dans sa voisine de droite.

```
...  ___ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______
        :      :      :      :      :      :      :      :      :      :
        :      :      :      :  *   :      :      :      :      :      :
...  ___:______:______:______:______:______:______:______:______:______:

                                    =

...  ___ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______ ______
        :      :      :      :      :      :      :      :      :      :
        :      :      :      :      : *  * :      :      :      :      :
...  ___:______:______:______:______:______:______:______:______:______:
```

| | seizaines | huitaines | quatraines | deuzaines | unités |
|---|---|---|---|---|---|

De manière pratique, réelle ou imaginée,
pour représenter binairement un nombre naturel,
on commence par placer ce nombre en jetons
dans la case des unités d'un abaque binaire.

Si la numération décimale est faite pour des animaux à dix doigts
la binaire convient aux êtres à deux mains :
tant que possible celles-ci s'emparent chacune d'un jeton
habitant tous deux une même case,
placent l'un dans la case voisine de gauche
et écartent l'autre.

Cette migration sélective vers l'Ouest s'achève
quand chaque case de l'abaque binaire est singletonne ou vide,
disposition fidèlement mimée par une suite finie de o et de I
de préférence lue et entendue à l'arabe de droite à gauche,
où les o signalent les cases vides et les I les singletonnes.
Ce mot binaire nomme sans ambiguité le naturel de départ,
et le présente implicitement comme somme de puissances de deux.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ainsi le binaire | I | o | o | I | I |
| nomme-t-il la somme | $2^4$ | + | | $2^1$ + | $2^0$ |
| récrite | | | IooII | | |

Alors qu'en numération de position décimale usuelle,
les chiffres se groupent par trois,

346 209 396 599 000 132

les chiffres binaires ou <u>bits</u> ont l'habitude d'aller par quatre

IIoo oooI oooo IIII ooII IIoo IooI oIIo

Le nombre dix-neuf qui fixait les idées ci-dessus
se récrit indifféremment

IooII = I ooII = oooI ooII

Le binaire d'un naturel est défini
à toute suite finie de zéros près rajoutée sur sa gauche.

Comme l'optique neumannienne adoptée par cet exposé impose
le vide comme zéro
et le singleton du vide comme unité,
il n'y a donc qu'un seul zéro et un seul un !

La graphie de connivence des I et des o signale
une utilisation courante de la numération binaire.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | = | o | = | oooo | 8 | = | Iooo |
| 1 | = | I | = | oooI | 9 | = | IooI |
| 2 | = | Io | = | ooIo | 10 | = | IoIo |
| 3 | = | II | = | ooII | 11 | = | IoII |
| 4 | = | Ioo | = | oIoo | 12 | = | IIoo |
| 5 | = | IoI | = | oIoI | 13 | = | IIoI |
| 6 | = | IIo | = | oIIo | 14 | = | IIIo |
| 7 | = | III | = | oIII | 15 | = | IIII |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | = | I oooo | = | oooI oooo |
| 17 | = | I oooI | = | oooI oooI |
| 18 | = | I ooIo | = | oooI ooIo |
| 19 | = | I ooII | = | oooI ooII |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | = | I oIoo | = | oooI oIoo |
| 21 | = | I oIoI | = | oooI oIoI |
| 22 | = | I oIIo | = | oooI oIIo |
| 23 | = | I oIII | = | oooI oIII |
| 24 | = | I Iooo | = | oooI Iooo |
| 25 | = | I IooI | = | oooI IooI |
| 26 | = | I IoIo | = | oooI IoIo |
| 27 | = | I IoII | = | oooI IoII |
| 28 | = | I IIoo | = | oooI IIoo |
| 29 | = | I IIoI | = | oooI IIoI |
| 30 | = | I IIIo | = | oooI IIIo |
| 31 | = | I IIII | = | oooI IIII |
| 32 | = | Io oooo | = | ooIo oooo |
| 33 | = | Io oooI | = | ooIo oooI |
| 34 | = | Io ooIo | = | ooIo ooIo |

On multiplie un naturel par deux
en rajoutant un zéro sur la droite de son binaire

2 * III = IIIo

Un naturel est pair si et seulement si
son binaire se termine par un zéro

Un naturel se multiplie par huit = Iooo
en rajoutant trois zéros à la droite de son binaire

56 = 8 * 7 = Iooo * III = IIIooo = ooII Iooo

Un naturel est multiple de huit si et seulement si son binaire se termine par ooo

Un naturel se multiplie par $2^n$ en rajoutant n zéros à la droite de son binaire.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = | $2^{0}$ | = | I | = | oooo oooo oooI |
| 2 | = | $2^{1}$ | = | Io | = | oooo oooo ooIo |
| 4 | = | $2^{2}$ | = | Ioo | = | oooo oooo oIoo |
| 8 | = | $2^{3}$ | = | Iooo | = | oooo oooo Iooo |
| 16 | = | $2^{4}$ | = | I oooo | = | oooo oooI oooo |
| 32 | = | $2^{5}$ | = | Io oooo | = | oooo ooIo oooo |
| 64 | = | $2^{6}$ | = | Ioo oooo | = | oooo oIoo oooo |
| 128 | = | $2^{7}$ | = | Iooo oooo | = | oooo Iooo oooo |
| 256 | = | $2^{8}$ | = | I oooo oooo | = | oooI oooo oooo |
| 512 | = | $2^{9}$ | = | Io oooo oooo | = | ooIo oooo oooo |
| 1024 | = | $2^{10}$ | = | Ioo oooo oooo | = | oIoo oooo oooo |
| 2048 | = | $2^{11}$ | = | Iooo oooo oooo | = | Iooo oooo oooo |
| 4096 | = | $2^{12}$ | = | I oooo oooo oooo | = | oooI oooo oooo oooo |

$$1 = 16^{0} = \text{oooI}$$

$$16 = 16^{1} = \text{oooI oooo}$$

$$256 = 16^{2} = \text{oooI oooo oooo}$$

$$4096 = 16^{3} = \text{oooI oooo oooo oooo}$$

$$65536 = 16^{4} = \text{oooI oooo oooo oooo oooo}$$

La numération (de position) binaire
est la numération de position de base deux.

La numération décimale est la numération de base dix,
et procède avec dix comme la binaire avec deux.

De manière générale, la numération (de position) de base b
procède avec le nombre naturel b (ni nul ni un)
comme la binaire avec deux et la décimale avec dix :

Sur abaque de base b

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $b^{4}$ | $b^{3}$ | $b^{2}$ | $b$ | $1$ |

la migration vers l'Ouest, à la poursuite du Soleil, s'opère
en remplaçant tant qu'il en persiste
tout paquet de b pions situés dans une même case
par un de ses pions posé dans la case voisine gauche
et en écartant les b-1 autres pions du paquet.
Le procédé s'achève

le procédé s'achève

quand chaque case de l'abaque porte au plus b-1 pions,
c'est-à-dire quand l'abaque affiche une suite finie,
de préférence lue à l'arabe de droite à gauche,
de naturels tous strictement plus petits que b .
Pour figurer une telle suite, il est nécessaire et suffisant
de disposer de b chiffres pour symboliser
les b premiers naturels de zéro à b-1 .
On obtient, de la sorte, le mot nommant en base b,
un nombre naturel donné, en plaçant au départ ce nombre de pions
dans la case des unités.

Tout naturel détermine son numéral en base b
à tous zéros ornementaux superflus d'extrême gauche près

1986 = 01986 = 001986 = 0001986 = 00001986 = 000001986

Comme chiffres en base b on pourrait toujours adopter
les b premiers mots binaires sans zéros superflus de la suite

o I Io II Ioo IoI IIo III Iooo IooI IoIo IoII ...

que l'écriture en base b séparerait par des points,
afin d'éviter toute confusion.

La litanie des naturels ainsi écrits en base sept se déroulerait

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| o | I | Io | II | Ioo | IoI | IIo |
| I.o | I.I | I.Io | I.II | I.Ioo | I.IoI | I.IIo |
| Io.o | Io.I | Io.Io | Io.II | Io.Ioo | Io.IoI | Io.IIo |
| II.o | II.I | II.Io | II.II | II.Ioo | II.IoI | II.IIo |
| Ioo.o | Ioo.I | Ioo.Io | Ioo.II | Ioo.Ioo | Ioo.IoI | Ioo.IIo |

Le mot formé par les $n$ derniers chiffres

d'un naturel écrit en base $b$

nomme son reste par $b^n$

Tout naturel écrit en base $b$ proclame

$$b_r \dots b_1 b_0 = + b_i b^i$$

Le second membre se récrit encore de manière récursive

$$( \dots (( b_r b + b_{r-1} ) b + b_{r-2} ) b + \dots + b_1 ) b + b_0$$

ou, sans parenthèse, par association implicite à gauche,

$$b_r b + b_{r-1} b + \dots + b_1 b + b_0$$

Cette écriture limpide synthétise tout la numération de base $b$

par ses consignes successives :

pars de $b_r$ multiplie par $b$ ajoute $b_{r-1}$ multiplie par $b$ ...

Tout naturel définit la somme de ses chiffres en base $b$

ainsi que leur <u>somme</u> <u>alternée</u>

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + \dots$$

On sait qu'en base dix :

tout naturel et la somme de ses chiffres

ont même reste par neuf;

et tout naturel et la somme alternée de ses chiffres

ont même reste par onze.

Plus généralement :

Tout naturel et la somme de ses chiffres en base b

ont même reste par b-1

Tout naturel et la somme alternée de ses chiffres en base b

ont même reste par b+1

Schématisant à l'extrême l'abaque binaire

```
...  ___ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____ _____
        :     :     :     :     :     :     :     :     :     :
        :     :     :     :     :     :     :     :     :     :
...  ___:_____:_____:_____:_____:_____:_____:_____:_____:_____:
```

par une suite de points

```
        .     .     .     .     .     .     .     .     .
```

toute disposition de pions sur l'abaque se décrit fidèlement

en inscrivant en les places adéquates

les nombres de pions habitant les diverses cases

écrits en une base supposée connue.

La disposition sur abaque binaire ci-dessous décrite en base dix

5 . 19 . 0 . 82 . 3 . 7

figure le naturel ci-après traduit

en décimal pur :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 . | 19 . | 0 . | 82 . | 3 . | 7 |
| = | | 29 . | 0 . | 82 . | 3 . | 7 |
| = | | | 58 . | 82 . | 3 . | 7 |
| = | | | | 198 . | 3 . | 7 |
| = | | | | | 399 . | 7 |
| = | | | | | | 805 |

en binaire pur :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 5 . | 19 . | 0 . | 82 . | 3 . | 7 |
| = | | | | | 5 . | 19 . | 0 . | 82 . | 6 . | 1 |
| = | | | | | 5 . | 19 . | 0 . | 85 . | 0 . | 1 |
| = | | | | | 5 . | 19 . | 42 . | 1 . | 0 . | 1 |
| = | | | | | 5 . | 40 . | 0 . | 1 . | 0 . | 1 |
| = | | | | | 25 . | 0 . | 0 . | 1 . | 0 . | 1 |
| = | | | | 12 . | 1 . | 0 . | 0 . | 1 . | 0 . | 1 |
| = | | | 6 . | 0 . | 1 . | 0 . | 0 . | 1 . | 0 . | 1 |
| = | | 3 . | 0 . | 0 . | 1 . | 0 . | 0 . | 1 . | 0 . | 1 |
| = | 1 . | 1 . | 0 . | 0 . | 1 . | 0 . | 0 . | 1 . | 0 . | 1 |

= IIooIooIoI

= ooII ooIo oIoI

Tous pions mis au départ dans la case des unités,

tout naturel se binarise par une telle migration :

100 = 50.0 = 25.0.0 = 12.1.0.0 = 6.0.1.0.0

= 3.0.0.1.0.0 = 1.1.0.0.1.0.0

= IIooIoo = oIIo oIoo

En bref :

1 3 6 12 25 50 100

I I o o I o o

100 = IIooIoo = oIIo oIoo

1 3 7 15 31 62 125 250 500 1000

I I I I I o I o o o

1000 = IIIIIoIooo = ooII IIIo Iooo

1 2 4 8 16 33 67

I o o o o I I

67 = oIoo ooII

Tout numéral décimal écrit de la manière habituelle

vérifie aussitôt

123 456 789 012 345

= 123 * 1000 + 456 * 1000 + 789 * 1000 + 012 * 1000 + 345

( où le second membre associe à gauche )

et se présente ainsi

<u>numéral</u> en base mille

dont les chiffres sont les naturels à trois chiffres décimaux

000, 001, 002, 003, ... 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999.

De manière générale, si, en naturels écrits en base $b$ ,
on groupe les chiffres par $r$ à partir de la droite,
l'écriture ainsi obtenue peut être regardée comme à base $b^r$
les chiffres utilisés étant les $b^r$ premiers naturels,
écrits avec $r$ chiffres en base $b$ .

Groupant ses bits par quatre,
la numération binaire dévoile sa vocation hexadécimale,
qui pourrait utiliser ces seize chiffres hexadécimaux binaires

oooo oooI ooIo ooII oIoo oIoI oIIo oIII

Iooo IooI IoIo IoII IIoo IIoI IIIo IIII

La version pure du "minicomputer" est un abaque binaire
dont les cases se groupent par <u>plaques</u> de quatre

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^{11}$ | $2^{10}$ | $2^{7}$ | $2^{6}$ | $2^{3}$ | $2^{2}$ |
| $2^{9}$ | $2^{8}$ | $2^{5}$ | $2^{4}$ | $2^{1}$ | $2^{0}$ |

et récrit les hexadécimaux binaires

$$\text{dcba} = \begin{matrix}\text{dc}\\ \text{ba}\end{matrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\text{IIII} = \begin{matrix}\text{II}\\ \text{II}\end{matrix}$ | $\text{IIIo} = \begin{matrix}\text{II}\\ \text{Io}\end{matrix}$ | $\text{IoII} = \begin{matrix}\text{Io}\\ \text{II}\end{matrix}$ | $\text{IoIo} = \begin{matrix}\text{Io}\\ \text{Io}\end{matrix}$ |
| $\text{IIoI} = \begin{matrix}\text{II}\\ \text{oI}\end{matrix}$ | $\text{IIoo} = \begin{matrix}\text{II}\\ \text{oo}\end{matrix}$ | $\text{IooI} = \begin{matrix}\text{Io}\\ \text{oI}\end{matrix}$ | $\text{Iooo} = \begin{matrix}\text{Io}\\ \text{oo}\end{matrix}$ |
| $\text{oIII} = \begin{matrix}\text{oI}\\ \text{II}\end{matrix}$ | $\text{oIIo} = \begin{matrix}\text{oI}\\ \text{Io}\end{matrix}$ | $\text{ooII} = \begin{matrix}\text{oo}\\ \text{II}\end{matrix}$ | $\text{ooIo} = \begin{matrix}\text{oo}\\ \text{Io}\end{matrix}$ |
| $\text{oIoI} = \begin{matrix}\text{oI}\\ \text{oI}\end{matrix}$ | $\text{oIoo} = \begin{matrix}\text{oI}\\ \text{oo}\end{matrix}$ | $\text{oooI} = \begin{matrix}\text{oo}\\ \text{oI}\end{matrix}$ | $\text{oooo} = \begin{matrix}\text{oo}\\ \text{oo}\end{matrix}$ |

Ils se figurent encore par cette version des chiffres de Lemaître

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 = :-: | 14 = :-' | 11 = :-. | 10 = :- |
| 13 = '-: | 12 = '-' | 9 = '-. | 8 = '- |
| 7 = .-: | 6 = .-' | 3 = .-. | 2 = .- |
| 5 = -: | 4 = -' | 1 = -. | 0 = - |

La numération hexadécimale recourt souvent
aux seize chiffres alphanumériques consécutifs

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Afin d'éviter d'éventuelles ambiguités
le symbole $ signale l'usage courant de
la numération hexadécimale en cette notation alphanumérique.

A = IoIo = 10 B = IoII = 11 C = IIoo = 12

D = IIoI = 13 E = IIIo = 14 F = IIII = 15

$ 10 = 16 $ 16 = 22 $ 22 = 34 $ 34 = 52

$ 52 = 82 $ 100 = 256 $ 1000 = 4096 100 = $ 64

$ 40 = 64 A0 = 160 FF = 255 $ 50 = 80

F8CA = 15 * 16 + 8 * 16 + 12 * 16 + 10 = 63 690

BABA = 11 * 16 + 10 * 16 + 11 * 16 + 10 = 47 802

BAC = 11 * 16 + 10 * 16 + 12 = 2 988

FADA = 15 * 16 + 10 * 16 + 13 * 16 + 10 = 64 218

FADE = 64 222 FACE = 64 206 CAFE = 51 966

EFFACE = 15 727 310

BE = 11 * 16 + 14 = 190

BEBE = 190 * 257 = 48 830

OB193 = 11 * 16 + 1 * 16 + 9 * 16 + 3 = 45 459

$$( \$\ 10 )^{2} = \$\ 10^{2} = 256 \qquad ( \$\ 10 )^{3} = \$\ 10^{3} = 4\ 096$$

$$\$\ 1\ 0000 = \$\ 10^{4} = ( \$\ 10 )^{4} = 16^{4} = 256^{2} = 65\ 536$$

F = 15 FF = 255 FFF = 4 095 FFFF = 65 535

17 = $ 11 2 * 17 = $ 22 170 = AA BB = 187

15 * 17 = 255 = FF

En contexte décimal kilo signifie

mille = $10^3$

En contexte hexadécimal kilo désigne

la puissance de deux la plus proche de mille soit

$2^A = 2^{10} = 1024$

De toute manière méga signifie kilo kilo

En contexte décimal méga signifie million = $10^6$

En contexte hexadécimal méga signifie $2^{20}$ = 1 048 576

Un octet ou byte

est une place de mémoire permettant de mémoriser

tout mot binaire à huit bits, ou, ce qui revient au même,

tout hexadécimal à deux chiffres alphanumériques

Les deux kilo sont égaux à moins de trois pour cent près

Les deux méga sont égaux à moins de cinq pour cent près

On admet généralement qu'une page dactylographiée usuelle comporte deux mille caractères, soit 2 kilos = 2K

On admettra, de plus,
que le stockage d'un caractère
nécessite une mémoire d'un octet.

Une mémoire de
deux Kilooctets = 2 Ko = deux Kilobytes
permet donc de mémoriser une page.

Une mémoire de 64 Ko
peut mémoriser un cahier de 32 pages.

Une mémoire de un mégaoctet ou mégabyte
est apte à mémoriser un livre de 500 pages

Un disque dur de 20 Mo ( = 20 mégaoctets )
peut emmagasiner vingt volumes de 500 pages

Un cristallographe qui fait tourner un programme de 16 Mo
utilise une mémoire
équivalente à 16 volumes de 500 pages.

## Table d'addition hexadécimale alphanumérique

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F |
| 1 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 |
| 2 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 |
| 3 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| A | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| B | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A |
| C | 0C | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B |
| D | 0D | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B | 1C |
| E | 0E | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B | 1C | 1D |
| F | 0F | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 1A | 1B | 1C | 1D | 1E |

Complémentaires additifs par rapport à seize

1 - F   2 - E   3 - D   4 - C   5 - B   6 - A   7 - 9   8 - 8

# Table de Multiplication hexadécimale alphanumérique

| * | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 |
| 1 | 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 0A | 0B | 0C | 0D | 0E | 0F |
| 2 | 00 | 02 | 04 | 06 | 08 | 0A | 0C | 0E | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 1A | 1C | 1E |
| 3 | 00 | 03 | 06 | 09 | 0C | OF | 12 | 15 | 18 | 1B | 1E | 21 | 24 | 27 | 2A | 2D |
| 4 | 00 | 04 | 08 | 0C | 10 | 14 | 18 | 1C | 20 | 24 | 28 | 2C | 30 | 34 | 38 | 3C |
| 5 | 00 | 05 | 0A | OF | 14 | 19 | 1E | 23 | 25 | 2D | 32 | 37 | 3C | 41 | 46 | 4B |
| 6 | 00 | 06 | 0C | 12 | 18 | 1E | 24 | 28 | 30 | 36 | 3C | 42 | 48 | 4E | 54 | 5A |
| 7 | 00 | 07 | 0E | 15 | 1C | 23 | 2A | 31 | 38 | 3F | 46 | 4D | 54 | 5B | 62 | 69 |
| 8 | 00 | 08 | 10 | 18 | 20 | 28 | 30 | 38 | 40 | 48 | 50 | 58 | 60 | 68 | 70 | 78 |
| 9 | 00 | 09 | 12 | 1B | 24 | 2D | 36 | 3F | 48 | 51 | 5A | 63 | 6C | 75 | 7E | 87 |
| A | 00 | 0A | 14 | 1E | 38 | 32 | 3C | 46 | 50 | 5A | 64 | 6E | 78 | 82 | 8C | 96 |
| B | 00 | 0B | 16 | 21 | 2C | 37 | 42 | 4D | 58 | 63 | 6E | 79 | 84 | 8F | 9A | A5 |
| C | 00 | 0C | 18 | 24 | 30 | 3C | 46 | 54 | 60 | 6C | 78 | 84 | 90 | 9C | A8 | B4 |
| D | 00 | 0D | 1A | 27 | 34 | 41 | 4E | 5B | 68 | 75 | 82 | 8F | 9C | A9 | B6 | C3 |
| E | 00 | 0E | 1C | 2A | 38 | 46 | 54 | 62 | 70 | 7E | 8C | 9A | A8 | B6 | C4 | D2 |
| F | 00 | 0F | 1E | 2D | 3C | 4B | 5A | 69 | 78 | 87 | 96 | A5 | B4 | C3 | D2 | E1 |

$\$19 = 5^2$ $\$23 = 5 * 7$ $\$31 = 7^2$

Tout nombre naturel étant identifié
à l'ensemble des naturels strictement plus petits que lui,
les fonctions $f: a \to b$ du naturel $a$ dans le naturel $b$
s'écrivent sans ambiguité ni double emploi

$$f = \begin{matrix} a-1 & a-2 & & 1 & 0 \\ & & \dots & & \\ f(a-1) & f(a-2) & & f(1) & f(0) \end{matrix}$$

où les $f(i)$ parcourent indépendamment les b premiers naturels.

Elles se trouvent dès lors parfaitement codées
par les numéraux à $a$ chiffres en base $b$,
ou mots à $a$ chiffres naturels au plus égaux à $b-1$
et donc encore par les naturels à $a$ chiffres en base $b$,

lesquels constituent, à leur tour, le naturel $b^a$,
ensemble des codes et nombre des fonctions de $a$ dans $b$,
? récrit, en base $b$, $1\ 0...0$ ( avec $a$ zéros ) .

Les fonctions de vérité à $n$ entrées ou variables
sont les fonctions
qui attribuent une des valeurs de vérité I ou o
à tout numéral binaire à $n$ bits.

Comme $2^n$ est l'ensemble des naturels binaires à $n$ chiffres,
les fonctions de vérité à $n$ entrées
peuvent être regardées comme les fonctions

$$2^n \to 2 ,$$

et leur nombre égale le naturel $2^{2^n}$
qui est en même temps l'ensemble de leurs codes naturels.

Le nombre des fonctions d'un ensemble à trois éléments dans un ensemble à dix éléments égale mille.

Les booliennes à m entrées et n sorties sont les fonctions qui attribuent un mot binaire à n bits

comme valeur à tout mot binaire à m bits

et s'identifient donc aux fonctions

$$2^m \dashrightarrow 2^n$$

Leur nombre égale donc le naturel

$$\left(2^n\right)^{2^m} = 2^{n * 2^m}$$

qui est encore l'ensemble de leurs codes.

Le nombre des booliennes à trois entrées et deux sorties

$\left(2^2\right)^{\left(2^3\right)}$

```
              ______________________
             I                      I
-----)-----I                      I
             I                      I-----)-----
-----)-----I          B           I
             I                      I-----)-----
-----)-----I                      I
             I______________________I
```

égale 65 536.

Le nombre des booliennes à deux entrées et trois sorties

$\left(2^3\right)^{\left(2^2\right)}$

```
              ______________________
             I                      I
             I                      I-----)-----
-----)-----I                      I
             I          B           I-----)-----
-----)-----I                      I
             I                      I-----)-----
             I______________________I
```

égale 4096.

Le nombre des fonctions de vérité à trois variables

$(2^3)^2$

```
                  _______________
                 I               I
    ----->-----I               I
                 I               I
    ----->-----I       B       I----->-----
                 I               I
    ----->-----I               I
                 I_______________I
```

égale 256

La fonction de vérité à trois variables "reste modulo 2"

se code

IoIo IoIo

table de vérité !

Les tables d'addition et de multiplication du champ de vérité

se dressent

| + | o | I |
|---|---|---|
| o | o | I |
| I | I | o |

| * | o | I |
|---|---|---|
| o | o | o |
| I | o | I |

L' addition de vérité à deux sommands se code oIIo

La multiplication de vérité à deux facteurs se code Iooo

L' addition de vérité à trois sommands se code IooI oIIo

La multiplication de vérité à trois facteurs se code Iooo oooo

ET à 2 variables I000
OU à 2 variables oIII

Afin de coder les seize fonctions de vérité à deux variables

notons du le mot d'entrée

dizaines unités

Constante nulle et constante une

se codent clairement

oooo IIII

Les quatre fonctions dégénérées à une seule variable effective

| | | | |
|---|---|---|---|
| u | I+u | d | I+d |

se codent

| | | | |
|---|---|---|---|
| IoIo | oIoI | IIoo | ooII |
| projection 2 | | projection 1 | |

La conjonction et sa négation

ou multiplication se codent ou incompatibilité

Iooo oIII

La disjonction non exclusive et sa négation ou exclusion

se codent

IIIo oooI

L'implication

d ===> u u ===> d

fausse dans la seule éventualité

du = Io du = oI

se code

IoII IIoI

Leurs négations respectives

d =/=> u et u =/=> d

se codent aussitôt

oIoo ooIo

L'addition de vérité et sa négation

ou ou

disjonction exclusive égalité

d + u d = u

se codent enfin

oIIo IooI