

De manière pratique, réelle ou imaginée,
pour représenter binaires un nombre naturel,
on commence par placer ce nombre en jetons
dans la case des unités d'un abaque binaire.

Si la numération décimale est faite pour des animaux à dix doigts
la binaire convient aux êtres à deux mains :
tant que possible celles-ci s'emparent chacune d'un jeton
habitant tous deux une même case,
placent l'un dans la case voisine de gauche
et écartent l'autre.

Cette migration sélective vers l'Ouest s'achève
quand chaque case de l'abaque binaire est singletonne ou vide,
disposition fidèlement mimée par une suite finie de 0 et de 1
de préférence lue et entendue à l'arabe de droite à gauche,
où les 0 signalent les cases vides et les 1 les singletonnes.
Ce mot binaire nomme sans ambiguïté le naturel de départ,
et le présente implicitement comme somme de puissances de deux.

Ainsi le binaire	1	0	0	1	1
nomme-t-il la somme	⁴ 2		+	¹ 2	⁰ 2
réécrite				10011	

Alors qu'en numération de position décimale usuelle,
les chiffres se groupent par trois,

346 209 396 599 000 132

les chiffres binaires ou bits ont l'habitude d'aller par quatre

IIoo oooI oooo IIII ooII IIoo IooI oIIo

Le nombre dix-neuf qui fixait les idées ci-dessus
se récrit indifféremment

IooII = I ooII = oooI ooII

Le binaire d'un naturel est défini
à toute suite finie de zéros près rajoutée sur sa gauche.

Comme l'optique neumannienne adoptée par cet exposé impose
le vide comme zéro

et le singleton du vide comme unité,

il n'y a donc qu'un seul zéro et un seul un !

La graphie de connivence des I et des o signale
une utilisation courante de la numération binaire.

0 =	o =	oooo	8 =	Iooo
1 =	I =	ooOI	9 =	IooI
2 =	Io =	ooIo	10 =	IoIo
3 =	II =	ooII	11 =	IoII
4 =	Ioo =	oIoo	12 =	IIoo
5 =	IoI =	oIoI	13 =	IIoI
6 =	IIo =	oIIo	14 =	IIIo
7 =	III =	oIII	15 =	IIII

16 = I oooo = oooI oooo

17 = I oooI = oooI oooI

18 = I ooIo = oooI ooIo

19 = I ooII = oooI ooII

20	=	I 0100	=	000I 0100
21	=	I 010I	=	000I 010I
22	=	I 01I0	=	000I 01I0
23	=	I 0III	=	000I 0III
24	=	I I000	=	000I I000
25	=	I I00I	=	000I I00I
26	=	I I0I0	=	000I I0I0
27	=	I I0II	=	000I I0II
28	=	I II00	=	000I II00
29	=	I II0I	=	000I II0I
30	=	I III0	=	000I III0
31	=	I IIII	=	000I IIII
32	=	I0 0000	=	00I0 0000
33	=	I0 000I	=	00I0 000I
34	=	I0 00I0	=	00I0 00I0

On multiplie un naturel par deux
en rajoutant un zéro sur la droite de son binaire

$$2 * III = III0$$

Un naturel est pair si et seulement si
son binaire se termine par un zéro

Un naturel se multiplie par huit = I000
en rajoutant trois zéros à la droite de son binaire
56 = 8 * 7 = I000 * III = IIII000 = 00II I000

Un naturel est multiple de huit si et seulement si
son binaire se termine par 000

Un naturel se multiplie par 2^n
en rajoutant n zéros à la droite de son binaire.

1	=	2^0	=	I	=	0000 0000 000I
2	=	2^1	=	I0	=	0000 0000 00I0
4	=	2^2	=	I00	=	0000 0000 0I00
8	=	2^3	=	I000	=	0000 0000 I000
16	=	2^4	=	I 0000	=	0000 000I 0000
32	=	2^5	=	I0 0000	=	0000 00I0 0000
64	=	2^6	=	I00 0000	=	0000 0I00 0000
128	=	2^7	=	I000 0000	=	0000 I000 0000
256	=	2^8	=	I 0000 0000	=	000I 0000 0000
512	=	2^9	=	I0 0000 0000	=	00I0 0000 0000
1024	=	2^{10}	=	I00 0000 0000	=	0I00 0000 0000
2048	=	2^{11}	=	I000 0000 0000	=	I000 0000 0000
4096	=	2^{12}	=	I 0000 0000 0000	=	000I 0000 0000 0000

le procédé s'achève

quand chaque case de l'abaque porte au plus $b-1$ pions, c'est-à-dire quand l'abaque affiche une suite finie, de préférence lue à l'arabe de droite à gauche, de naturels tous strictement plus petits que b . Pour figurer une telle suite, il est nécessaire et suffisant de disposer de b chiffres pour symboliser les b premiers naturels de zéro à $b-1$. On obtient, de la sorte, le mot nommant en base b , un nombre naturel donné, en plaçant au départ ce nombre de pions dans la case des unités.

Tout naturel détermine son numéral en base b à tous zéros ornementaux superflus d'extrême gauche près

$$1986 = 01986 = 001986 = 0001986 = 00001986 = 000001986$$

Comme chiffres en base b on pourrait toujours adopter les b premiers mots binaires sans zéros superflus de la suite

0 I Io II Ioo IoI IIo III Iooo IooI IoIo IoII ...

que l'écriture en base b séparerait par des points, afin d'éviter toute confusion.

La litanie des naturels ainsi écrits en base sept se déroulerait

o	I	Io	II	Ioo	IoI	IIo
I.o	I.I	I.Io	I.II	I.Ioo	I.IoI	I.IIo
Io.o	Io.I	Io.Io	Io.II	Io.Ioo	Io.IoI	Io.IIo
II.o	II.I	II.Io	II.II	II.Ioo	II.IoI	II.IIo
Ioo.o	Ioo.I	Ioo.Io	Ioo.II	Ioo.Ioo	Ioo.IoI	Ioo.IIo

Le mot formé par les n derniers chiffres
d'un naturel écrit en base b

nomme son reste par b^n

Tout naturel écrit en base b proclame

$$b_r \dots b_1 b_0 = \sum_{i=0}^n b_i b^i$$

Le second membre se réécrit encore de manière récursive

$$(\dots ((b_r b_{r-1} + b_{r-1}) b_{r-2} + b_{r-2}) b_{r-3} + \dots + b_1) b_0 + b_0$$

ou, sans parenthèse, par association implicite à gauche,

$$b_r b_{r-1} + b_{r-1} b_{r-2} + \dots + b_1 b_0$$

Cette écriture limpide synthétise tout la numération de base b
par ses consignes successives :

pars de b_r multiplie par b ajoute b_{r-1} multiplie par b ...

Tout naturel définit la somme de ses chiffres en base b
ainsi que leur somme alternée

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + \dots$$

On sait qu'en base dix :

tout naturel et la somme de ses chiffres

ont même reste par neuf;

et tout naturel et la somme alternée de ses chiffres

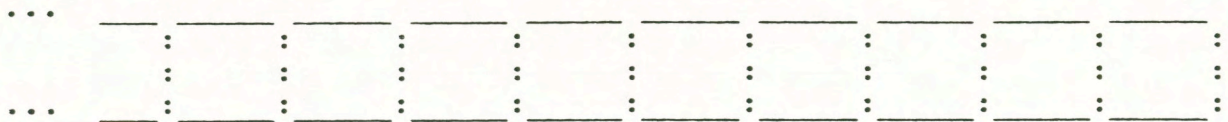
ont même reste par onze.

Plus généralement :

Tout naturel et la somme de ses chiffres en base b
ont même reste par $b-1$

Tout naturel et la somme alternée de ses chiffres en base b
ont même reste par $b+1$

Schématisant à l'extrême l'abaque binaire



par une suite de points

.

toute disposition de pions sur l'abaque se décrit fidèlement
en inscrivant en les places adéquates
les nombres de pions habitant les diverses cases
écrits en une base supposée connue.

La disposition sur abaque binaire ci-dessous décrite en base dix

5 . 19 . 0 . 82 . 3 . 7

figure le naturel ci-après traduit

en décimal pur :

	5 .	19 .	0 .	82 .	3 .	7
=		29 .	0 .	82 .	3 .	7
=			58 .	82 .	3 .	7
=				198 .	3 .	7
=					399 .	7
=						805

en binaire pur :

				5 .	19 .	0 .	82 .	3 .	7
=				5 .	19 .	0 .	82 .	6 .	1
=				5 .	19 .	0 .	85 .	0 .	1
=				5 .	19 .	42 .	1 .	0 .	1
=				5 .	40 .	0 .	1 .	0 .	1
=					25 .	0 .	0 .	1 .	0 . 1
=			12 .	1 .	0 .	0 .	1 .	0 .	1
=			6 .	0 .	1 .	0 .	0 .	1 .	0 . 1
=		3 .	0 .	0 .	1 .	0 .	0 .	1 .	0 . 1
=	1 .	1 .	0 .	0 .	1 .	0 .	0 .	1 .	0 . 1

= 1100100101

= 0011 0010 0101

Tous pions mis au départ dans la case des unités,
tout naturel se binarise par une telle migration :

$$\begin{aligned}
 100 &= 50.0 = 25.0.0 = 12.1.0.0 = 6.0.1.0.0 \\
 &= 3.0.0.1.0.0 = 1.1.0.0.1.0.0 \\
 &= 1100100 = 0110 0100
 \end{aligned}$$

En bref :

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 6 & 12 & 25 & 50 & 100 & \\
 I & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & \\
 100 & = & 1100100 & = & 0110 & 0100 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 62 & 125 & 250 & 500 & 1000 \\
 I & I & I & I & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\
 1000 & = & 1111101000 & = & 0011 & 1110 & 1000 & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 33 & 67 \\
 I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & I \\
 67 & = & 0100 & 0011 & & &
 \end{array}$$

Tout numéral décimal écrit de la manière habituelle
vérifie aussitôt

$$\begin{array}{cccccc}
 & 123 & 456 & 789 & 012 & 345 \\
 = & 123 * 1000 & + & 456 * 1000 & + & 789 * 1000 & + & 012 * 1000 & + & 345 \\
 & (\text{où le second membre associe à gauche}) & & & & & & & &
 \end{array}$$

et se présente ainsi

et récrit les hexadécimaux binaires

dcba = $\begin{matrix} dc \\ ba \end{matrix}$

IIII = $\begin{matrix} II \\ II \end{matrix}$	IIIIo = $\begin{matrix} II \\ Io \end{matrix}$	IoII = $\begin{matrix} Io \\ II \end{matrix}$	IoIo = $\begin{matrix} Io \\ Io \end{matrix}$
IIoI = $\begin{matrix} II \\ oI \end{matrix}$	IIoo = $\begin{matrix} II \\ oo \end{matrix}$	IooI = $\begin{matrix} Io \\ oI \end{matrix}$	Iooo = $\begin{matrix} Io \\ oo \end{matrix}$
oIII = $\begin{matrix} oI \\ II \end{matrix}$	oIIo = $\begin{matrix} oI \\ Io \end{matrix}$	ooII = $\begin{matrix} oo \\ II \end{matrix}$	ooIo = $\begin{matrix} oo \\ Io \end{matrix}$
oIoI = $\begin{matrix} oI \\ oI \end{matrix}$	oIoo = $\begin{matrix} oI \\ oo \end{matrix}$	oooI = $\begin{matrix} oo \\ oI \end{matrix}$	oooo = $\begin{matrix} oo \\ oo \end{matrix}$

Ils se figurent encore par cette version des chiffres de Lemaître

15 = :-:	14 = :-'	11 = :-.	10 = :-
13 = '-:	12 = '-'	9 = '-.	8 = '-
7 = .-:	6 = .-'	3 = .-.	2 = .-
5 = -:	4 = -'	1 = -.	0 = -

La numération hexadécimale recourt souvent
aux seize chiffres alphanumériques consécutifs

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Afin d'éviter d'éventuelles ambiguïtés
le symbole \$ signale l'usage courant de
la numération hexadécimale en cette notation alphanumérique.

A = 1010 = 10 B = 1011 = 11 C = 1100 = 12
D = 1101 = 13 E = 1110 = 14 F = 1111 = 15

\$ 10 = 16 \$ 16 = 22 \$ 22 = 34 \$ 34 = 52
\$ 52 = 82 \$ 100 = 256 \$ 1000 = 4096 100 = \$ 64
\$ 40 = 64 A0 = 160 FF = 255 \$ 50 = 80

F8CA = 15 * 16 + 8 * 16 + 12 * 16 + 10 = 63 690
BABA = 11 * 16 + 10 * 16 + 11 * 16 + 10 = 47 802
BAC = 11 * 16 + 10 * 16 + 12 = 2 988
FADA = 15 * 16 + 10 * 16 + 13 * 16 + 10 = 64 218

FADE = 64 222 FACE = 64 206 CAFE = 51 966
EFFACE = 15 727 310

BE = 11 * 16 + 14 = 190
BEBE = 190 * 257 = 48 830

OB193 = 11 * 16 + 1 * 16 + 9 * 16 + 3 = 45 459

(\$ 10)² = \$ 10² = 256 (\$ 10)³ = \$ 10³ = 4 096
\$ 1 0000 = \$ 10⁴ = (\$ 10)⁴ = 16⁴ = 256² = 65 536

On admettra, de plus,
que le stockage d'un caractère
nécessite une mémoire d'un octet.

Une mémoire de
deux Kilooctets = 2 Ko = deux Kilobytes
permet donc de mémoriser une page.

Une mémoire de 64 Ko
peut mémoriser un cahier de 32 pages.

Une mémoire de un mégaoctet ou mégabyte
est apte à mémoriser un livre de 500 pages

Un disque dur de 20 Mo (= 20 mégaoctets)
peut emmagasiner vingt volumes de 500 pages

Un cristallographe qui fait tourner un programme de 16 Mo
utilise une mémoire
équivalente à 16 volumes de 500 pages.

Tout nombre naturel étant identifié
à l'ensemble des naturels strictement plus petits que lui,
les fonctions $f: a \rightarrow b$ du naturel a dans le naturel b
s'écrivent sans ambiguïté ni double emploi

$$f = \begin{array}{ccccccc} & a-1 & a-2 & & 1 & 0 & \\ & f(a-1) & f(a-2) & \dots & f(1) & f(0) & \end{array}$$

où les $f(i)$ parcourent indépendamment les b premiers naturels.

Elles se trouvent dès lors parfaitement codées
par les numéraux à a chiffres en base b ,
ou mots à a chiffres naturels au plus égaux à $b-1$
et donc encore par les naturels à a chiffres en base b ,

lesquels constituent, à leur tour, le naturel b^a ,
ensemble des codes et nombre des fonctions de a dans b ,
? récrit, en base b , $1\ 0\dots 0$ (avec a zéros). *

Les fonctions de vérité à n entrées ou variables
sont les fonctions

qui attribuent une des valeurs de vérité 1 ou 0
à tout numéral binaire à n bits.

Comme 2^n est l'ensemble des naturels binaires à n chiffres,
les fonctions de vérité à n entrées
peuvent être regardées comme les fonctions

$$2^n \rightarrow 2,$$

et leur nombre égale le naturel 2^n

qui est en même temps l'ensemble de leurs codes naturels.

Le nombre des fonctions d'un ensemble à trois éléments dans un ensemble à dix éléments égale mille.

Les booliennes à m entrées et n sorties sont les fonctions qui attribuent un mot binaire à n bits

comme valeur à tout mot binaire à m bits et s'identifient donc aux fonctions

$$2^m \rightarrow 2^n$$

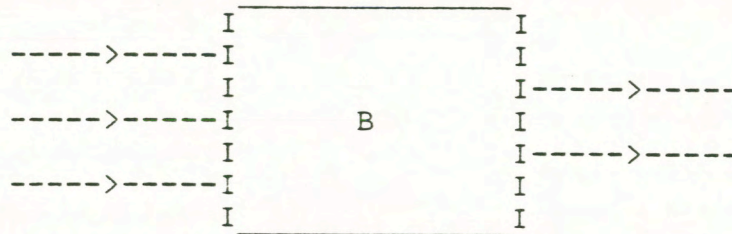
Leur nombre égale donc le naturel

$$2^n = 2^{n * 2^m}$$

qui est encore l'ensemble de leurs codes.

Le nombre des booliennes à trois entrées et deux sorties

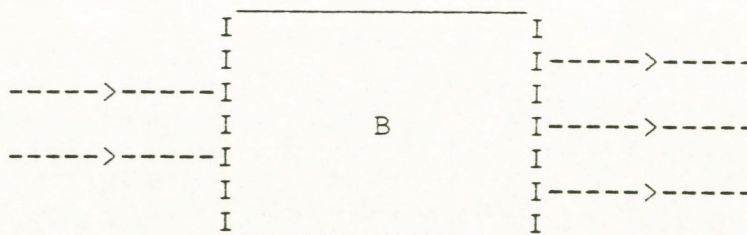
(2^3)
 (2^2)



égale 65 536.

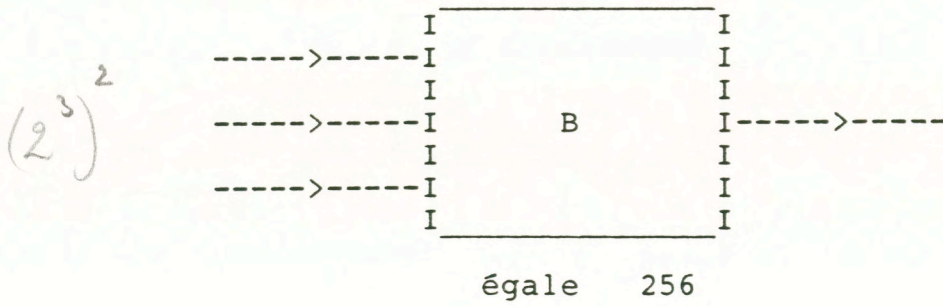
Le nombre des booliennes à deux entrées et trois sorties

(2^3)
 (2^2)



égale 4096.

Le nombre des fonctions de vérité à trois variables



La fonction de vérité à trois variables "reste modulo 2"
 se code
 1010 1010

table de vérité!

Les tables d'addition et de multiplication du champ de vérité
 se dressent

:	:	:	:	:	:	:	:
:	+	:	0	:	:	1	:
:	:	:	:	:	:	:	:
:	0	:	0	:	:	1	:
:	:	:	:	:	:	:	:
:	1	:	1	:	:	0	:
:	:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:	:

L' addition de vérité à deux sommands se code 0110
 La multiplication de vérité à deux facteurs se code 1000

L' addition de vérité à trois sommands se code 1001 0110
 La multiplication de vérité à trois facteurs se code 1000 0000

ET à 2 variables 1000
 OU à 2 variables 0111

Afin de coder les seize fonctions de vérité à deux variables
 notons du le mot d'entrée

deux unités

Constante nulle et constante une
se codent clairement

oooo

IIII

Les quatre fonctions dégénérées à une seule variable effective

u

I+u

d

I+d

se codent

IoIo

oIoI

IIoo

ooII

projection 2

projection 1

La conjonction
ou multiplication

et

sa négation

ou incompatibilité

se codent

Iooo

oIII

La disjonction non exclusive

et

sa négation ou exclusion

se codent

IIIo

oooI

L'implication

d ==> u

u ==> d

fausse dans la seule éventualité

du = Io

du = oI

se code

IoII

IIoI

Leurs négations respectives

d !=> u

et

u !=> d

se codent aussitôt

oIoo

ooIo

X

L' <u>addition de vérité</u>	et	sa négation
ou		ou
disjonction exclusive		<u>égalité</u>
d + u		d = u
	se codent enfin	
oIIo		IooI